基于尖点突变的人群拥挤模型研究*

王丽娜，王恒山

（上海理工大学 管理学院，上海 200093）

摘 要：近年来的统计分析表明，人群拥挤踩踏事故逐步上升为大型公共聚集场所的主要人为事故灾害类型之一。为了防止这类事故带来的危害，需要从理论高度开展对人群拥挤踩踏事故的承载体人群的运行系统的研究。国内外关于人群拥挤事故的研究方法很多，但至今还未找到较为完善、科学和经济的方法。因此提出将尖点突变理论引入到人群拥挤模型中，建立人群拥挤的尖点突变模型。实证分析表明，用突变模型得出的结论与数据拟合得出的结果大体一致，这说明突变理论应用于此领域是可行的。

关键词：突变理论；尖点突变；群集指数；人群拥挤；突变指征

中图分类号：X913 **文献标识码：**A **文章编号：**1000－811X(2010)02－0103－05

人群聚集在某些特定环境和特定条件下(以清明祭扫为例)会产生严重的人群拥挤踩踏事故。有研究通过对过去 60 年间大约 120 起人群拥挤踩踏事故的分析得出，近 10 年以来，人群拥挤踩踏事故迅速增加，仅 1995－2005 年期间的拥挤踩踏事故就达到了 80 多起，因观众人数失控等因素引发事故的几乎占 50% 左右[1]。伤亡人数也呈迅速增长趋势。虽然人群拥挤导致事故发生是小概率事件，但产生的社会影响却是极大的。随着社会的发展，人群聚集活动也在不断增加。人群拥挤踩踏事故作为一种典型的人为事故类型由于其发生突然、社会影响严重等特征越来越引起人们的重视。清明前夕，各相关单位纷纷出台了相关预案，其中重点强调了严防在祭扫期间发生人群踩踏事件。清明小假期时，墓区及周边道路人群高度聚集，疏散距离较长，潜在的危险隐患较多，由于多种不确定突发原因，极易造成群死群伤的人群拥挤踩踏事故。拥挤踩踏事故是指在公共场所活动中由突发事件引起的人群拥挤踩踏而造成的人员伤亡事故。此类事故后果严重，因而对人群拥挤的特点及影响因素的研究变得尤为重要。但目前研究主要集中在对事故致因定性分析阶段，而没有通过对事故内部规律的总结分析来对其成因机制、发生、演变过程机理进行综合性的描述。

人群拥挤踩踏事故是一个随时间变化而能量不断聚集的过程，是一个由量变到质变、能量突然释放的过程。依据人群移动特征，事故发生过程需要经过 4 个阶段[2]，即自由移动、滞留、拥挤和踩踏。如果事故没有发生，即人群安全疏散，则这个过程中人群经过自由移动、滞留、拥挤和疏散 4 个阶段。人群拥挤是一个人群流动从平衡到拥挤，再从拥挤到平衡过程中发生的“跳跃”，是一个突变现象，这与车辆交通中的流量突变非常相似。突变理论在车辆交通领域已有了相关研究并取得了很好的效果，因此本文将突变理论引入到人流拥挤系统中，并建立模型加以分析。

1 突变理论和突变指征

突变理论是 Thom[3] 以奇点理论、稳定性理论等数学理论为基础的，用于研究不连续变化现象的理论。在突变理论中，Thom 研究了初等函数的分类问题，通过建立微分方程与函数之间的联系，对梯度系统中的奇点进行了分类。研究归纳出 7 类突变类型：折迭、尖点、燕尾、蝴蝶、椭圆脐、双曲脐和抛物脐突变。突变理论表明，涉及到 2 个状态变量 4 个控制变量以内的初等突变函数仅有这 7 类。对于存在突变现象的系统只要确立了它的状态变量和控制变量数目，就可以选择对应的 7 个初等突变函数中的一个作为系统的演化模型，进而求解系统的演化特点。

---

* 收稿日期：2009－10－09
基金项目：上海市重点学科管理科学与工程(S30504)资助
作者简介：王丽娜(1983－)，女，河北邢台人，硕士研究生，主要从事系统工程研究. E-mail：wanglina032@163.com

突变理论考虑的不只是单一参数的变化，它考虑的是多个参数变化时平衡点附近的分叉情况，尤其是其中出现的突变。它研究下述突变现象的基本特征：系统的状态空间中必然具有多个稳定态，因而在改变参数时，系统才可能出现从一个稳态向另一个稳态的跃迁，即发生突变；在不同稳定态间存在着不稳定态，系统从一个稳态向另一个稳态跃迁中直接跨过了这个不稳定的定态在实际中不可能达到；控制参数的不同取值使系统从一个稳态向另一个稳态转变的过程不同；突变的发生与控制变量变化的方向有关，控制变量从一个方向变化和控制变量从另外一个方向变化发生的突变的状态是不相同的，有滞后现象；在分叉曲线附近，控制参量变化路径的微小不同能够引起系统产生完全不相同的性态。当然，突变的形式越复杂，特征越多。突变理论的应用领域不仅局限在数学、力学和物理学等自然科学领域中，而且还推广到生物学和社会科学等领域中。

1.1 突变指征

一个系统具有突变特性主要体现在下列5个方面，即5个突变指征[3]。

(1)*多模态* 系统中可能有两个或多个不同的状态，也就是说系统的位势对于控制变量的某些范围可能有两个或多个极小值。尖点突变只具有双模态性，即具有两种不同的状态。

(2)*分叉性(发散性)* 控制变量的有限变化会导致状态变量在平衡位置的数值的变化，在一般情况下控制变量的微小扰动可能只会引起状态变量初值和终值的微小变化，但在临界点附近控制变量的微小扰动可能会导致状态变量终值发生很大的变化，这种控制变量的扰动的不稳定性称为分叉性。

(3)*不可达性* 系统至少有一个不稳定的平衡位置，此处既可以连续又可以不连续，在数学上不可微。

(4)*突跳* 采用理想延迟时，系统由一个消失的极小值跳跃到全局极小值或局部极小值，其位势的数值有一个不连续的变化；采用Maxwell约定时，位势的数值发生连续的变化，但其导数不连续。

(5)*滞后性* 当系统遵循理想延迟约定时才存在滞后性，若系统遵循Maxwell约定则不存在滞后现象。理想延迟约定：系统留在原来的稳定平衡位置上，直到这个稳定平衡位置消失；Maxwell约定：系统总是转移到使它的势全局极小的稳定平衡位置。

1.2 突变理论在交通领域的应用

在国内，将突变理论应用到交通流理论的研究很少。张亚平和张起森[4]从系统论的观点出发通过对实测数据进行适当变换后，应用尖点突变理论描述交通流参数之间的关系，在高速公路的通行能力和速度预测、划分交通流状态和高速公路速度－流量模型的建立等方面进行了探索。他们认为根据尖点突变理论模型得出速度－流量、流量－时间占有率和速度－时间占有率模型之后，便可用于交通流预测和仿真，以弥补实际难以采集到交通拥挤状态数据的不足。但是，他们用于研究的数据仅限于个别出现交通拥挤现象的高速公路路段，还不具备普遍性。

2 基于突变理论的人群拥挤模型

人群拥挤系统是由多个参数描述的复杂系统，它具有以下5个特征：① 常见的人群运行情况有通畅运行、接近拥挤运行和拥挤踩踏等几个情况；② 一旦发生拥挤踩踏，则人群无法自行解决，此时需要外界力量协调控制、疏导才可解决；③ 在不同的稳定状态之间存在着多个不稳定的状态，这些状态不是持久的，是瞬间的；④ 有研究证明群集指数随着人群密度和人流速度的变化到一定程度时会发生一个突变；⑤ 由于人群中信息的传递需要时间，所以人群拥挤系统中存在着滞后现象。因此可根据突变理论，寻找到能描述各拥挤空间系统变量之间关系的函数来确定突变点。人群拥挤踩踏事故的一个重要特点是人群的高度聚集，一般用群集指数(Crowd index) $C(t)$ 来表示这一拥挤程度[5]：

$$C(t)=\alpha\times(N/S)\times\beta\times v(t)\times\gamma, \tag{1}$$

式中：α 为公共场所的事故易发性系数，由专家给定；N 为公共场所容纳的总人数；S 为公共场所有效的人群活动面积，m^2；β 为公共场所进出口人群流动系数，人/(m·s)；v 为公共场所人群移动的平均速度，m/s；γ 为由于年龄、性别、生理、心理、教育水平、安全意识、安全行为等因素决定的人群聚集修正系数，通常由专家给定。

群集指数中 $[N/S]$ 和 v 是重要的决定量，$[N/S]$ 可以用人群密度人/m^2 或 m^2/人表示，v 为人群的移动速度，单位是 m/s。根据Fruin、Hanki和Wright、Predtechenskii和Milinskii，以及Ando等人的研究，可以得出人群密度与运动速度之间的关系[6]如图1所示。

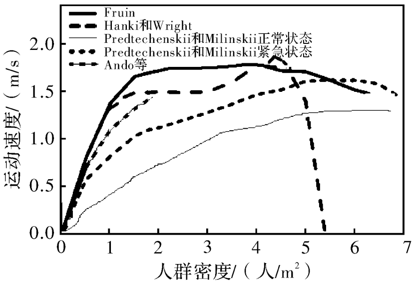

图 1　人群密度与运动速度之间的关系

2.1　尖点突变模型的建立

群集指数的高低可以表征人群拥挤系统发生拥挤踩踏等事故的可能性的高低[7]，因此本文将群集指数作为系统的状态变量，而图 1 中人群密度与移动速度之间的关系图与尖点突变模型中的分叉集曲线相似，所以将公共场所人群移动的平均速度与人群期望速度[8] 1.34 m/s 的差值 $v(t)$ 作为一个控制变量，公共场所的人流量 $D(t)$ 作为另一个控制变量来建立突变模型，$D(t)=N/S$。$v(t)$ 为主控变量，$D(t)$ 为次控变量，其中 t 为时间，C、v、D 均为时间 t 的函数。一个状态变量，两个控制变量的系统对应 7 个初等突变函数中的尖点突变模型，由此建立人群拥挤突变模型如下：

势函数为：

$$E(C(t)) = C(t)^4 + v(t)C(t)^2 + D(t)C(t)。\tag{2}$$

突变流形 M 为：

$$4C(t)^3 + 2v(t)C(t) + D(t) = 0。\tag{3}$$

分叉集 B 为：

$$8v(t)^3 + 27D(t)^2 = 0。\tag{4}$$

其中分叉集的方程(4)可由 $\frac{\mathrm{d}E(C)}{\mathrm{d}C} = 4C(t)^3 + 2v(t)C(t) + D(t) = 0$ 和 $\frac{\mathrm{d}^2E(C)}{\mathrm{d}C^2} = 12C^2(t) + 2v(t) = 0$ 联立消去 C 得到，突变流形 M 与分叉集 B 的形状见图 2。

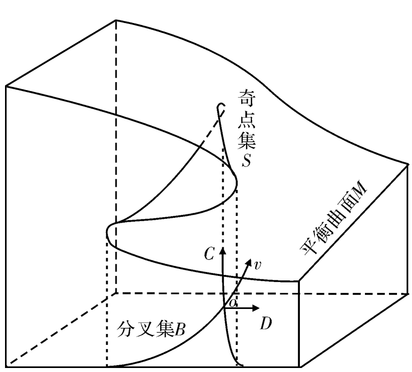

图 2　突变流形 M 与分叉集 B 示意图

将分叉集方程(4)对 $v(t)$ 求导得到：$\frac{\mathrm{d}Q(t)}{\mathrm{d}v(t)} = -\frac{4v^2(t)}{9D(t)}$，这说明次控变量与主控变量的变化方向相反。

突变流形曲面 M 中存在一条折叠曲线。当控制变量 v、D 变化时，状态变量 C 发生相应变化，曲线的运动轨迹亦发生渐变。其中突变流形曲面 M 的上半曲面(上叶)表示系统的状态安全，人群拥挤程度不高，发生突发事件而导致拥挤踩踏的概率小；突变流形曲面 M 的下半曲面(下叶)表示群集指数高，系统情况不好，此时拥挤踩踏事故发生概率高，而中间折叠曲面(中叶)表示不平衡区域。开始是在突变曲面的上叶运动，一旦运动轨迹经过折叠曲线便会出现“突跳”，而逾越中叶，进入下叶。

2.2　模型的求解

人群的运动速度随着人群密度的变化而产生相应的变化。正常情况下，公共场所行人的步行速度为 1～2 m/s[9]，步速的平均值为 1.34 m/s。Fruin 等人在公共设施服务水平研究中以人群密集程度[10](用人群密度表述)为标准，将公共设施划分为 6 个(A～F)等级，同时对不同等级所对应的人群密度范围及对应的人群运动状态进行了描述(表 1)。

表 1　Fruin 提出的速度与密度关系

运动状态	自由行走	稍有冲突	对速度有一些限制	对大多数人行走有限制	所有人行走都受限	所有人都拖着脚走
密度/(人/m²)	<0.3	0.3～0.43	0.43～0.72	0.72～1.08	1.08～2.17	>2.17

当 $8v(t)^3 + 27D(t)^2 > 0$ 时，整个人群运行系统处于稳定状态，此时不易发生拥挤踩踏事故；当 $8v(t)^3 + 27D(t)^2 < 0$ 时，表示此时系统处于不稳定状态；当跨越临界线时，系统发生突变，此时 $v(t) < 0$，$8v(t)^3 + 27D(t)^2 = 0$，分叉集方程有 3 个实根，即

$$C_1 = 2\left(-\frac{v}{3}\right)^{\frac{1}{2}},\ C_2 = C_3 = -\left(-\frac{v}{3}\right)^{\frac{1}{2}},$$

其中两个重根是稳定的，另一个根是不稳定的。

由分叉集方程可得

$$v(t) = -\frac{3}{2}D(t)^{\frac{2}{3}},\tag{5}$$

这是人群拥挤系统失稳的临界集。

3 实证研究

通过对上海某墓区清明期间实测的数据对所建立的人群拥挤突变模型进行验证，其中根据表1将临界人群密度定为0.43~0.72 人/m^2，由分叉集方程可得 $v(t)$ 在 −0.85 ~ −1.20 m/s 之间，即临界速度在0.14~0.49 m/s 之间。人流量 $Q=D\times$ 速度×入口宽度×时间间隔，由上述临界值可得临界10 min 人流量在240~504 人/10 min 之间(入口宽4 m)。与实测数据经过回归分析计算所拟合出来的结果一致(图3)。

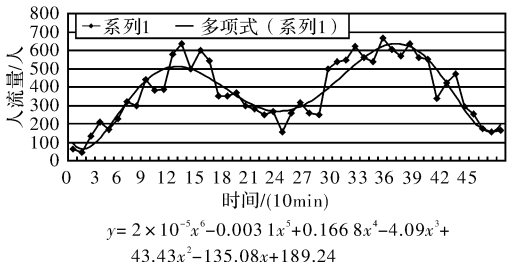

图3 人流量拟合曲线

对拟合曲线方程求二阶导数化简可得式(6)：

$$y''=0.3x^4-31x^3+1\,000.8x^2-12\,270x+43\,430=0。\tag{6}$$

用MATLAB对式(6)求解得方程的结果，其中前3个解无效，有效解 $x=5.863$ 对应实测数据的值为305 人/10 min，在用突变模型求得的临界值的范围内。拟合结果与尖点突变模型所得的结果吻合，这验证了尖点突变理论应用于人群拥挤模型中是可靠的。

4 结论

将尖点突变理论引入到人群拥挤系统的判定及预测中，建立了人群拥挤系统判定及预测的尖点突变模型。

通过得到的临界速度及人流量，可以实时地对人群流动行为进行干预，根据得到的临界速度及临界人流量制定相应的交通管制策略和措施，如调节墓区等公共场所进出口流量等，从而达到预防人群拥挤踩踏事故的目的。

在确定变量之间的对应关系时，认为群集指数是发生突变的状态变量这个假设的合理性还需要进一步验证。因为群集指数在2007年首次被提出，且其值的特征以及值与现象之间的定量关系仍不是很明确，如果能结合文献[11]对所建模型进行坐标平移和旋转可能会取得更好的结果。另外，虽然应用突变理论可以很好地解释经常观察到的“跳跃”现象，但是在研究过程中使用的数据是以10 min为间隔的，由于时间间隔太长，在过渡的时候拟合效果不是很好。

参考文献：

[1] 叶海明，嵇方. 大型社会活动安全事故成因分析及预警组织模型构建[J]. 灾害学，2006，21(4)：108－113.

[2] 张青松. 人群拥挤踩踏事故风险理论及其在体育赛场中的应用[D]. 天津：南开大学，2007.

[3] 凌复华. 突变理论及其应用[M]. 上海：上海交通大学出版社，1987.

[4] 张亚平，张起森. 尖点突变理论在交通流预测中的应用[J]. 系统工程学报，2000，15(3)：272－276.

[5] 任常兴，吴宗之，刘茂. 城市公共场所人群拥挤踩踏事故分析[J]. 中国安全科学学报，2005，15(12)：102－106.

[6] Thompson P A，Marchant E W. Testing and Application of the Computer Model Simulex [J]. Fire Safety Journal，1995，24(2)：149－166.

[7] 胡志莹，叶明海. 大型社会活动人群拥挤事故防范系统研究[J]. 灾害学，2003，21(1)：108－112.

[8] Dickie J F. Crowd Disaster [C]//Engineering For Crowd Safety. Amsterdam，The Netherlands，March 1993：9－97.

[9] 李强，陈春晓，陈晋，等. 考虑疏散安全的公共场所人员容量控制研究[J]. 中国安全科学学报，2007，17(3)：33－39.

[10] Fang Z，Lo S M，Lu J A. On the Relationship between Crowd Density and Movement Velocity [J]. Fire Safety Journal，2003，38(3)：271－283.

[11] Jorge A Acha－Daza，Fred L Hall. Application of catastrophe theory to traffic flow variables [J]. TRB，1994，28(3)：235－250.

Research on Models of Crowding Based on Cusp Catastrophe Theory

Wang Lina and Wang Hengshan

(*Business School*, *University of Shanghai for Science and Technology*, *Shanghai* 200093, *China*)

Abstract: Many crowd-related disasters (that are, fatal accidents) over the past decade have demonstrated the possible lethal consequences of large gatherings of people. Theoretical study on crowding and trampling should be developed to avoid potential risk in gathering people. There are a number of solutions to crowding at home and abroad, but without any feasible and economical method so far. Based on cusp catastrophe theory, model of crowding is established. Empirical analysis indicates that conclusion and data based on catastrophe model roughly consists with fitted results, which means the catastrophe theory is feasible in this field.

Key words: catastrophe theory; cusp catastrophe; crowd index; crowding; catastrophe characteristics

(上接第 53 页)

Preliminary Study on Emergency Relief Supplies Information System of Ningbo City Based on GIS

Lu Hongmou and Zou Yijiang

(*Institute of Civil Engineering and Environment*, *Ningbo University*, *Ningbo* 315211, *China*)

Abstract: The storage situation of emergency relief supplies in China is analyzed. Due to the situation that only paper records are available in Ningbo city, relief supplies are classified and a conceptual model is abstracted. Meanwhile, basic theory of GIS is used to design the framework of emergency relief supplies information system in Ningbo and a foundation for the realization of the system is laid after detailed deepening of each subsystem of the framework.

Key words: emergency relief; supplies information system; conceptual model; GIS; Ningbo of Zhejiang Province